Aufagebenkatalog zum Kurs zu Stoch0 – Winter 2024/2025
Aufgaben zum Thema **Wahrscheinlichkeitsrechnung**
Dr. Anton Malevich

Aufgabe 1 Betrachten Sie eine Urne mit 8 Kugeln, nummeriert von 1 bis 8. Ziehe zufällig eine Kugel. Sei Ω die Menge der möglichen Ergebnisse. Definiere Ereignisse

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Ergebnis ist mindestens } 5\}, \\ B &= \{\text{Ergebnis ist höchstens } 7\}, \\ C &= \{\text{Ergebnis ist ungerade}\}. \end{aligned}$$

Geben Sie die folgenden Ereignisse durch Auflisten ihrer Elemente an:
a) Ω, b) $A \cap B$, c) $B \cup C$, d) $(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap C$.

Aufgabe 2 Wie in Aufgabe 1 betrachte eine Urne mit 8 Kugeln. Wir ziehen 3 Kugeln mit Zurücklegen, und notieren jeweils die Zahlen.

a) Wie viele Elemente hat der Laplace-Raum Ω zu diesem Zufallsexperiment?

b) Wie viele Ergebnisse ω gehören zum Ereignis {es wird genau zwei Mal die Zahl 2 gezogen}?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dreimal dieselbe Zahl gezogen?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden drei verschiedene Zahlen gezogen?

Aufgabe 3 Ein Experiment bestehe aus dem Werfen eines Würfels und einer Münze.

a) Geben Sie einen geeigneten Ergebnisraum an.

b) Zeigt die Münze Wappen, so wird die doppelte Augenzahl des Würfels notiert, bei Zahl nur die einfache. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine gerade Zahl notiert wird?

Aufgabe 4 Aus einer Grundgesamtheit $G = \{1, 2, 3, 4\}$ wird eine einfache Zufallsstichprobe vom Umfang $n = 2$ gezogen. Betrachten Sie die beiden Fälle "Modell mit Zurücklegen" und "Modell ohne Zurücklegen".

a) Listen Sie für beide Fälle alle möglichen Stichproben auf.

b) Wie groß ist jeweils für ein einzelnes Element die Wahrscheinlichkeit, in die Stichprobe zu gelangen?

c) Wie groß ist jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass die Elemente 1 und 2 beide in die Stichprobe gelangen?

Aufgabe 5 Aus einer Gruppe von drei Männern und vier Frauen sind drei Positionen in verschiedenen Kommissionen zu besetzen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse, dass mindestens eine der drei Positionen mit einer Frau besetzt wird bzw. dass höchstens eine der drei Positionen mit einer Frau besetzt wird,

a) falls jede Person nur eine Position erhalten kann?

b) falls jede Person mehrere Positionen erhalten kann?

Aufgabe 6 Beim Würfeln mit einem fairen Würfel betrachte folgende Ereignisse:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Ergebnis mindestens } 4\}, \\ B &= \{\text{Ergebnis ist ungerade}\}. \end{aligned}$$

Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten: a) $P(A)$, b) $P(B)$, c) $P(A \cap B)$, d) $P(B|A)$.

Aufgabe 7 Aus einer Urne mit einer roten, einer blauen und einer weißen Kugel wird dreimal mit Zurücklegen gezogen. Betrachte die Ereignisse

$$A = \{\text{Alle gezogenen Kugeln sind rot}\},$$
$$B = \{\text{Mindestens zwei der gezogenen Kugeln haben dieselbe Farbe}\},$$
$$C = \{\text{Die erste gezogene Kugel ist weiß}\},$$
$$D = \{\text{Die letzte gezogene Kugel ist blau}\}.$$

Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten: a) $P(A|B)$, b) $P(B|C)$, c) $P(C|D)$, d) $P(D|A)$.

Aufgabe 8 Eine Gruppe von 60 Drogenabhängigen, die Heroin spritzen, nimmt an einer Therapie teil (A = stationär, $\overline{A}$ = ambulant). Zudem unterziehen sich die Drogenabhängigen freiwillig einem HIV-Test (B = HIV-positiv, $\overline{B}$ = HIV-negativ). Dabei stellen sich 45 der 60 Personen als HIV-negativ und 15 als HIV-positiv heraus. Von denen, die HIV-positiv sind, sind 80% in der stationären Therapie, während von den HIV-Negativen nur 40% in der stationären Therapie sind.

a) Formulieren Sie die obigen Angaben als Wahrscheinlichkeiten.

b) Sie wählen zufällig eine der 60 drogenabhängigen Personen aus. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese

   (i) an der stationären Therapie teilnimmt und HIV-positiv ist,

   (ii) an der stationären Therapie teilnimmt und HIV-negativ ist,

   (iii) an der stationären Therapie teilnimmt.

c) Berechnen Sie $P(B|A)$ und fassen Sie das zugehörige Ereignis in Worte.

d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen $P(A|B)$ und $P(A)$, wenn A und B unabhängig sind?

Aufgabe 9 Zeigen Sie:
Sind A und B stochastisch unabhängig, dann sind auch $\overline{A}$ und B stochastisch unabhängig.

Aufgabe 10 An einer Studie zum Auftreten von Farbenblindheit nimmt eine Gruppe von Personen teil, die sich zu 45% aus Männern (M) und zu 55% aus Frauen ($\overline{M}$) zusammensetzt. Man weiß, dass im Allgemeinen 6% der Männer farbenblind (B) sind, d. h. es gilt $P(B|M) = 0.06$. Dagegen sind nur 0.5% der Frauen farbenblind, d. h. $P(B|\overline{M}) = 0.005$.

Verwenden Sie die angegebene Information zum Berechnen der Wahrscheinlichkeit, dass eine per Los aus der Gruppe ausgewählte Person eine farbenblinde Frau ist, d. h. zum Berechnen von $P(B \cap \overline{M})$.

Berechnen Sie außerdem $P(\overline{M} \cap \overline{B})$, $P(M \cap B)$, $P(B)$ und $P(\overline{M}|B)$. Beschreiben Sie die zugehörigen Ereignisse in Worten.

Aufgabe 11 An den Kassen von Supermärkten und Kaufhäusern wird ein zusätzliches Gerät bereitgestellt, mit dem die Echtheit von 100€-Scheinen geprüft werden soll. Aus Erfahrung weiß man, dass 15 von 10.000 Scheinen gefälscht sind. Bei diesem Gerät wird durch Aufblinken einer Leuchte angezeigt, dass der Schein als falsch eingestuft wird. Es ist bekannt, dass das Gerät mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95 aufblinkt, wenn der Schein falsch ist, und mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.1, wenn der Schein echt ist. Wie sicher kann man davon ausgehen, dass der 100€-Schein tatsächlich falsch ist, wenn das Gerät aufblinkt?